Mathematics: The Complete Course



Matemáticas: el curso completo

The Complete Course — Bilingual Edition

El curso completo — Edición bilingüe

Maikel Caballero

MKLDesignsShop · mkldesignsshop.com

la Unidad 13 tiende el puente al precálculo con sucesiones, logaritmos y una primera mirada a los límites. La Unidad 14 está dedicada a la resolución de problemas y a la preparación de exámenes, para que el curso termine como terminan los cursos reales: usándolo todo a la vez.

Cómo usar este libro: lee primero la lección en inglés si tu clase es en inglés, o lee ambas versiones lado a lado si una palabra o una idea no queda clara. Estudia cada ejemplo resuelto con lápiz en mano: tapa la solución, inténtalo tú, luego destápala y compara paso a paso. La matemática se aprende haciendo, no mirando. Después de las lecciones, completa la sección de Práctica sin mirar la Clave de respuestas, luego comprueba tu trabajo y, lo más importante, repite cada problema que fallaste hasta poder resolverlo sin ayuda.

Cada respuesta de este libro se calculó dos veces, por dos caminos distintos, antes de imprimirse. Aun así, trata la Clave de respuestas como una compañera de estudio, no como una autoridad: si tu método es sólido y tu aritmética se comprueba, confía en tu trabajo y encuentra dónde divergen los dos caminos. Un glosario bilingüe cierra cada unidad y un glosario completo cierra el libro, porque en matemática la mitad de entender un problema es entender sus palabras, en ambos idiomas.

No necesitas ser «una persona de matemáticas» para terminar este curso. Necesitas orden, paciencia y práctica diaria en dosis pequeñas. Trabaja una lección a la vez, lleva un cuaderno para tus propios ejemplos y regresa a las unidades anteriores cuando un tema posterior se sienta flojo: el álgebra siempre descansa sobre la aritmética, y el cálculo descansará sobre todo lo que hay aquí. Comencemos.

Unit 1 — Numbers and Operations · Números y operaciones

Introduction · Introducción

Every later unit in this course rests on this one. If fractions, decimals, percents, exponents, and the order of operations are solid, algebra becomes a language you can read; if they are shaky, algebra feels like memorizing spells. This unit rebuilds number sense carefully, with the numbers of daily life in Jacksonville, San Juan, and everywhere in between: prices, distances, recipes, and paychecks.

Cada unidad posterior de este curso descansa sobre esta. Si las fracciones, los decimales, los porcentajes, los exponentes y el orden de las operaciones son sólidos, el álgebra se vuelve un idioma que puedes leer; si están flojos, el álgebra se siente como memorizar hechizos. Esta unidad reconstruye el sentido numérico con cuidado, con los números de la vida diaria en Jacksonville, San Juan y en todas partes: precios, distancias, recetas y salarios.

Lesson 1.1 — Integers, Fractions, Decimals and Percents · Enteros, fracciones, decimales y porcentajes

Integers are the whole numbers and their negatives: …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … On a number line, adding a positive moves right and adding a negative moves left, so $-5 + 9 = 4$ and $3 - 7 = -4$. Subtracting a negative is the same as adding a positive: $6 - (-2) = 8$. Signs multiply by a simple rule: same signs give a positive product, different signs give a negative product, so $(-4)(-3) = 12$ and $(-4)(3) = -12$.

A **fraction** a/b names a parts of a whole divided into b equal parts. To add or subtract fractions, first rewrite them with a common denominator. To multiply, multiply numerators and denominators straight across. To divide, multiply by the reciprocal of the divisor. Always simplify: divide numerator and denominator by their greatest common factor.

Decimals and percents are fractions in disguise: a percent is a fraction with denominator 100, so $35\% = 35/100 = 0.35$. To change a decimal to a percent, multiply by 100 and add the % sign; to change a percent to a decimal, divide by 100. "Percent of a number" always means multiplication: 15% of 80 = $0.15 \times 80 = 12$.

Example 1. Compute $3/4 + 1/6$. The least common denominator of 4 and 6 is 12. Rewrite: $3/4 = 9/12$ and $1/6 = 2/12$. Add: $9/12 + 2/12 = 11/12$, which is already simplified.

Example 2. A shirt in a San Juan store costs $40 and is taxed at 11.5% (the Puerto Rico sales tax). Tax = $0.115 \times 40 = \$4.60$. Total paid = $40 + 4.60 = \$44.60$.

Los **enteros** son los números completos y sus negativos: …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … En una recta numérica, sumar un positivo mueve a la derecha y sumar un negativo mueve a la izquierda, así que $-5 + 9 = 4$ y $3 - 7 = -4$. Restar un negativo es lo mismo que sumar un positivo: $6 - (-2) = 8$. Los signos se multiplican con una regla simple: signos iguales dan un producto positivo, signos distintos dan un producto negativo, así que $(-4)(-3) = 12$ y $(-4)(3) = -12$.

Una **fracción** a/b nombra a partes de un todo dividido en b partes iguales. Para sumar o restar fracciones, primero reescríbelas con un denominador común. Para multiplicar,

multiplica numeradores y denominadores directamente. Para dividir, multiplica por el recíproco del divisor. Simplifica siempre: divide el numerador y el denominador por su máximo factor común.

Los **decimales y porcentajes** son fracciones disfrazadas: un porcentaje es una fracción con denominador 100, así que 35% = 35/100 = 0.35. Para cambiar un decimal a porcentaje, multiplica por 100 y añade el signo %; para cambiar un porcentaje a decimal, divide por 100. «Porcentaje de un número» siempre significa multiplicación: 15% de 80 = 0.15 × 80 = 12.

Ejemplo 1. Calcula 3/4 + 1/6. El mínimo denominador común de 4 y 6 es 12. Reescribe: 3/4 = 9/12 y 1/6 = 2/12. Suma: 9/12 + 2/12 = 11/12, que ya está simplificado.

Ejemplo 2. Una camisa en una tienda de San Juan cuesta $40 y tiene un impuesto de 11.5% (el impuesto de ventas de Puerto Rico). Impuesto = 0.115 × 40 = $4.60. Total pagado = 40 + 4.60 = $44.60.

Lesson 1.2 — Order of Operations and Properties · Orden de las operaciones y propiedades

When an expression has several operations, everyone must get the same answer, so mathematics uses an agreed order — **PEMDAS**: Parentheses (and other grouping symbols), Exponents, Multiplication and Division (left to right, as equals), Addition and Subtraction (left to right, as equals). The most common error in all of school mathematics is doing multiplication before parentheses or adding before multiplying.

Three properties make mental math and algebra legal. The **commutative** property: a + b = b + a and ab = ba. The **associative** property: (a + b) + c = a + (b + c). The **distributive** property: a(b + c) = ab + ac — the bridge between arithmetic and algebra, used constantly from Unit 3 onward.

Example 1. Evaluate 6 + 2 × 3². Exponents first: 3² = 9. Multiplication next: 2 × 9 = 18. Addition last: 6 + 18 = 24.

Example 2. Evaluate 5(12 + 3) − 10 ÷ 2. Parentheses: 12 + 3 = 15, so 5 × 15 = 75. Division: 10 ÷ 2 = 5. Subtract: 75 − 5 = 70.

Cuando una expresión tiene varias operaciones, todos deben obtener la misma respuesta, así que la matemática usa un orden acordado — **PEMDAS**: Paréntesis (y otros símbolos de agrupación), Exponentes, Multiplicación y División (de izquierda a derecha, como iguales), Adición y Sustracción (de izquierda a derecha, como iguales). El error más común en toda la matemática escolar es multiplicar antes de los paréntesis o sumar antes de multiplicar.

Tres propiedades hacen legales el cálculo mental y el álgebra. La propiedad **conmutativa**: a + b = b + a y ab = ba. La propiedad **asociativa**: (a + b) + c = a + (b + c). La propiedad **distributiva**: a(b + c) = ab + ac — el puente entre la aritmética y el álgebra, usado constantemente desde la Unidad 3.

Ejemplo 1. Evalúa 6 + 2 × 3². Primero los exponentes: 3² = 9. Luego la multiplicación: 2 × 9 = 18. Al final la suma: 6 + 18 = 24.

Ejemplo 2. Evalúa 5(12 + 3) − 10 ÷ 2. Paréntesis: 12 + 3 = 15, así que 5 × 15 = 75. División: 10 ÷ 2 = 5. Resta: 75 − 5 = 70.

Lesson 1.3 — Exponents, Roots and Scientific Notation · Exponentes, raíces y notación científica

An **exponent** counts repeated multiplication: $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$. Three rules carry this unit and return in Unit 9: multiply powers with the same base by adding exponents ($x^3\cdot x^2 = x^5$); divide by subtracting exponents ($x^6/x^2 = x^4$); raise a power to a power by multiplying exponents ($(x^2)^3 = x^6$). A negative exponent means a reciprocal: $2^{-3} = 1/8$. Any nonzero number to the zero power equals 1.

A **square root** undoes a square: $\sqrt{144} = 12$ because $12^2 = 144$. Perfect squares (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144) are worth memorizing. **Scientific notation** writes very large or small numbers as $a \times 10^n$ with $1 \le a < 10$: the distance from Jacksonville to San Juan, about 1,600 miles, and Earth's population, about $8{,}100{,}000{,}000 = 8.1 \times 10^9$.

Example 1. Simplify $(3 \times 10^4)(2 \times 10^3)$. Multiply the coefficients: $3 \times 2 = 6$. Add the exponents: $10^4 \times 10^3 = 10^7$. Result: 6×10^7.

Example 2. Write 0.00045 in scientific notation. Move the decimal point 4 places right to get 4.5, so $0.00045 = 4.5 \times 10^{-4}$.

Un **exponente** cuenta la multiplicación repetida: $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$. Tres reglas sostienen esta lección y regresan en la Unidad 9: multiplica potencias con la misma base sumando los exponentes ($x^3\cdot x^2 = x^5$); divide restando los exponentes ($x^6/x^2 = x^4$); eleva una potencia a otra potencia multiplicando los exponentes ($(x^2)^3 = x^6$). Un exponente negativo significa un recíproco: $2^{-3} = 1/8$. Todo número distinto de cero elevado a la potencia cero es igual a 1.

Una **raíz cuadrada** deshace un cuadrado: $\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 144$. Vale la pena memorizar los cuadrados perfectos (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144). La **notación científica** escribe números muy grandes o pequeños como $a \times 10^n$ con $1 \le a < 10$: la distancia de Jacksonville a San Juan, unas 1,600 millas, y la población de la Tierra, unos $8{,}100{,}000{,}000 = 8.1 \times 10^9$.

Ejemplo 1. Simplifica $(3 \times 10^4)(2 \times 10^3)$. Multiplica los coeficientes: $3 \times 2 = 6$. Suma los exponentes: $10^4 \times 10^3 = 10^7$. Resultado: 6×10^7.

Ejemplo 2. Escribe 0.00045 en notación científica. Mueve el punto decimal 4 lugares a la derecha para obtener 4.5, así que $0.00045 = 4.5 \times 10^{-4}$.

Common errors · Errores comunes: adding fractions straight across ($1/2 + 1/3 \neq 2/5$); treating 2^3 as $2 \times 3 = 6$ instead of 8; moving the decimal the wrong way when converting percents. · Sumar fracciones directamente ($1/2 + 1/3 \neq 2/5$); tratar 2^3 como $2 \times 3 = 6$ en vez de 8; mover el punto decimal en la dirección equivocada al convertir porcentajes.

Formula summary · Resumen de fórmulas: Percent = part/whole × 100 · $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$ · $a^m/a^n = a^{m-n}$ · $(a^m)^n = a^{mn}$ · $a^{-n} = 1/a^n$ · $a^0 = 1$.

Practice · Práctica

A. Multiple choice · Selección múltiple 1. [EN] What is 3/4 + 1/6? a) 4/10 b) 11/12 c) 2/3 d) 5/6 [ES] ¿Cuánto es 3/4 + 1/6? a) 4/10 b) 11/12 c) 2/3 d) 5/6 2. [EN] What is (5/8)(4/5)? a) 9/13 b) 1 c) 1/2 d) 25/32 [ES] ¿Cuánto es (5/8)(4/5)? a) 9/13 b) 1 c) 1/2 d) 25/32 3. [EN] 0.75 written as a simplified fraction is: a) 75/10 b) 3/4 c) 7/5 d) 15/100 [ES] 0.75 escrito como fracción simplificada es: a) 75/10 b) 3/4 c) 7/5 d) 15/100 4. [EN] What is 15% of 80? a) 8 b)