Statistics & Advanced Algebra: The Complete Course



Estadística y álgebra avanzada: el curso completo

The Complete Course — Bilingual Edition

El curso completo — Edición bilingüe

Maikel Caballero

MKLDesignsShop · mkldesignsshop.com

Cada unidad sigue la misma estructura de clase. Primero, una explicación clara desarrolla cada idea paso a paso. Después, los ejemplos resueltos muestran el razonamiento completo —no solo la respuesta final— porque en matemáticas el camino es el aprendizaje. Cada unidad cierra con práctica graduada: diez preguntas de selección múltiple y cinco de respuesta corta, todas bilingües, con una clave completa que da una razón breve para cada respuesta. Un glosario de la unidad recoge los términos clave en ambas lenguas, y el final del libro reúne una referencia de fórmulas, una tabla de la distribución normal estándar (z) y un glosario bilingüe completo.

Cómo usar este libro: lee la lección en inglés de forma activa, lápiz en mano, y reproduce cada ejemplo en papel antes de leer su solución. Luego lee el espejo en español para confirmar que entendiste las ideas, no solo los símbolos. Haz la práctica sin mirar la clave, verifica tu trabajo y rehace —en otro día— cada problema que fallaste. Una calculadora científica básica basta para todo el libro; la Unidad 14 muestra flujos de trabajo con calculadora y hoja de cálculo que hacen rápidos y confiables los cálculos largos.

Una nota sobre la honestidad en los números: cada conjunto de datos, clave de respuestas y tabla estadística de este libro fue calculado y verificado dos veces por caminos independientes durante su preparación. Cuando un ejemplo dice que una media es 82, los datos escritos en la página realmente promedian 82. Las matemáticas —y la estadística sobre todo— son una disciplina de afirmaciones verificables, y este libro practica lo que enseña.

Unit 1 — Review: Functions and Graphs at Full Strength · Repaso: funciones y gráficas a plena fuerza

Introduction · Introducción

This opening unit is a bridge. Volume 1 introduced functions as machines that turn an input into exactly one output. Here we work at full strength: we classify the great function families, transform their graphs with confidence, compose functions, and invert them. Everything later in this book — polynomials, exponentials, logarithms, regression lines — is a function, so the language built here is used on every page that follows.

Esta unidad inicial es un puente. El volumen 1 presentó las funciones como máquinas que convierten una entrada en exactamente una salida. Aquí trabajamos a plena fuerza: clasificamos las grandes familias de funciones, transformamos sus gráficas con seguridad, componemos funciones y las invertimos. Todo lo que sigue en este libro —polinomios, exponenciales, logaritmos, rectas de regresión— es una función, así que el lenguaje construido aquí se usa en cada página siguiente.

Lesson 1.1 — Function Families and Transformations · Familias de funciones y transformaciones

A **function** assigns to each input x exactly one output f(x). Its **domain** is the set of allowed inputs and its **range** the set of outputs actually produced. The great families you must recognize on sight are: linear $f(x) = mx + b$ (a line), quadratic $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a parabola), polynomial (smooth curves built from powers of x), rational (a quotient of polynomials), radical (with roots, such as $\sqrt{x}$), absolute value $|x|$ (a V shape), exponential a^x (Unit 4) and logarithmic (Unit 4). Recognizing the family tells you the shape of the graph, the likely domain restrictions and the kind of equation you will face later.

Transformations move a parent graph predictably. For $y = a\cdot f(b(x - h)) + k$: k shifts the graph vertically (up if $k > 0$), h shifts it horizontally (right if $h > 0$ — note the sign trap: $x - 3$ means right 3), a stretches it vertically and reflects it across the x-axis when $a < 0$, and b compresses it horizontally. Master the parent graphs of x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $|x|$ and $1/x$, and every transformation becomes a description you can sketch without plotting points.

Example 1. Describe and sketch $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ from the parent $f(x) = x^2$. Solution: The -2 inside moves the parabola **right 2**; the $+3$ outside moves it **up 3**. The vertex moves from (0, 0) to (2, 3); the shape and opening are unchanged. Check with a point: $g(2) = 0 + 3 = 3$ ✓, and $g(3) = 1 + 3 = 4$, one unit right and one up from the vertex, exactly as a parabola behaves.

Example 2. State the domain and range of $f(x) = \sqrt{(x - 4)} + 1$. Solution: A square root requires its radicand to be non-negative: $x - 4 \geq 0$, so the domain is $x \geq 4$, written $[4, \infty)$. The smallest value of $\sqrt{(x - 4)}$ is 0, so the smallest output is $0 + 1 = 1$; the range is $[1, \infty)$. The graph is the $\sqrt{x}$ curve shifted right 4 and up 1, starting at (4, 1).

Una **función** asigna a cada entrada x exactamente una salida f(x). Su **dominio** es el conjunto de entradas permitidas y su **rango**, el conjunto de salidas realmente producidas. Las grandes familias que debes reconocer a simple vista son: lineal $f(x) = mx + b$ (una

recta), cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (una parábola), polinómica (curvas suaves construidas con potencias de x), racional (un cociente de polinomios), radical (con raíces, como $\sqrt{x}$), valor absoluto $|x|$ (forma de V), exponencial a^x (Unidad 4) y logarítmica (Unidad 4). Reconocer la familia te dice la forma de la gráfica, las restricciones probables del dominio y el tipo de ecuación que enfrentarás después.

Las **transformaciones** mueven la gráfica madre de forma predecible. Para $y = a \cdot f(b(x - h)) + k$: k desplaza la gráfica verticalmente (hacia arriba si $k > 0$), h la desplaza horizontalmente (hacia la derecha si $h > 0$ — ojo con la trampa del signo: $x - 3$ significa derecha 3), a la estira verticalmente y la refleja sobre el eje x cuando $a < 0$, y b la comprime horizontalmente. Domina las gráficas madre de x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $|x|$ y $1/x$, y cada transformación se vuelve una descripción que puedes dibujar sin tabular puntos.

Ejemplo 1. Describe y dibuja $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ desde la madre $f(x) = x^2$. Solución: El -2 interior mueve la parábola **a la derecha 2**; el $+3$ exterior la mueve **hacia arriba 3**. El vértice pasa de (0, 0) a (2, 3); la forma y la abertura no cambian. Verificación con un punto: $g(2) = 0 + 3 = 3$ ✓, y $g(3) = 1 + 3 = 4$, un paso a la derecha y uno hacia arriba desde el vértice, exactamente como se comporta una parábola.

Ejemplo 2. Indica el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{(x - 4)} + 1$. Solución: Una raíz cuadrada exige que su radicando sea no negativo: $x - 4 \geq 0$, así que el dominio es $x \geq 4$, escrito $[4, \infty)$. El menor valor de $\sqrt{(x - 4)}$ es 0, así que la menor salida es $0 + 1 = 1$; el rango es $[1, \infty)$. La gráfica es la curva $\sqrt{x}$ desplazada a la derecha 4 y hacia arriba 1, comenzando en (4, 1).

Lesson 1.2 — Inverse Functions and Composition · Funciones inversas y composición

The **composition** $f(g(x))$ feeds the output of g into f: always work from the inside out. Composition is not commutative — $f(g(x))$ and $g(f(x))$ usually differ — and it is the algebraic heart of inverse functions and of chained models (a price converted to dollars, then taxed, then discounted is a composition of three functions).

A function has an **inverse** f^{-1} only if it is **one-to-one** (each output comes from exactly one input; its graph passes the horizontal line test). The inverse swaps domain and range and reflects the graph across the line $y = x$. To find it algebraically: write $y = f(x)$, swap x and y, and solve for y. The defining check is $f(f^{-1}(x)) = x$ and $f^{-1}(f(x)) = x$.

Example 1. Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = x^2$, find $f(g(2))$ and $g(f(2))$. Solution: Inside out: $g(2) = 4$, then $f(4) = 2(4) + 3 =$ **11**. The other order: $f(2) = 7$, then $g(7) = 49$. So $f(g(2)) = 11 \neq 49 = g(f(2))$ — order matters.

Example 2. Find the inverse of $f(x) = 2x + 3$ and verify it. Solution: $y = 2x + 3 \rightarrow$ swap: $x = 2y + 3 \rightarrow x - 3 = 2y \rightarrow y = (x - 3)/2$. So $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$. Verify: $f(f^{-1}(11)) = f(4) = 11$ ✓ (using Example 1's value), and $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(7) = (7 - 3)/2 = 2$ ✓.

La **composición** $f(g(x))$ alimenta la salida de g dentro de f: se trabaja siempre de adentro hacia afuera. La composición no es conmutativa —$f(g(x))$ y $g(f(x))$ suelen diferir— y es el corazón algebraico de las funciones inversas y de los modelos encadenados (un precio convertido a dólares, luego con impuesto, luego con descuento es una composición de tres funciones).

Una función tiene **inversa** f^{-1} solo si es **uno a uno** (cada salida proviene de exactamente una entrada; su gráfica pasa la prueba de la recta horizontal). La inversa intercambia dominio y rango y refleja la gráfica sobre la recta $y = x$. Para hallarla algebraicamente: escribe $y = f(x)$, intercambia x e y, y despeja y. La verificación que la define es $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Ejemplo 1. Dadas $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$, halla $f(g(2))$ y $g(f(2))$. Solución: De adentro hacia afuera: $g(2) = 4$, luego $f(4) = 2(4) + 3 = \mathbf{11}$. En el otro orden: $f(2) = 7$, luego $g(7) = 49$. Así que $f(g(2)) = 11 \neq 49 = g(f(2))$: el orden importa.

Ejemplo 2. Halla la inversa de $f(x) = 2x + 3$ y verifícala. Solución: $y = 2x + 3 \rightarrow$ intercambio: $x = 2y + 3 \rightarrow x - 3 = 2y \rightarrow y = (x - 3)/2$. Así $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$. Verificación: $f(f^{-1}(11)) = f(4) = 11$ ✓ (usando el valor del Ejemplo 1), y $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(7) = (7 - 3)/2 = 2$ ✓.

Calculator note · Nota de calculadora: Most graphing calculators confirm transformations instantly: graph $Y1 = x^2$ and $Y2 = (x - 2)^2 + 3$ together and read the vertex. · La mayoría de las calculadoras gráficas confirman las transformaciones al instante: grafica $Y1 = x^2$ y $Y2 = (x - 2)^2 + 3$ juntas y lee el vértice.

Formula summary · Resumen de fórmulas: Shifts: $f(x - h)$ right h; $f(x) + k$ up k. Inverse: swap x, y and solve. Composition: inside out.

Practice · Práctica

A. Multiple choice · Selección múltiple 1. [EN] The graph of $g(x) = (x + 4)^2 - 1$ is the parabola x^2 shifted… a) right 4, up 1 b) left 4, down 1 c) left 4, up 1 d) right 4, down 1 [ES] La gráfica de $g(x) = (x + 4)^2 - 1$ es la parábola x^2 desplazada… a) derecha 4, arriba 1 b) izquierda 4, abajo 1 c) izquierda 4, arriba 1 d) derecha 4, abajo 1 2. [EN] The domain of $f(x) = \sqrt{(x + 5)}$ is… a) $x \geq -5$ b) $x \geq 5$ c) all reals d) $x \leq -5$ [ES] El dominio de $f(x) = \sqrt{(x + 5)}$ es… a) $x \geq -5$ b) $x \geq 5$ c) todos los reales d) $x \leq -5$ 3. [EN] If $f(x) = 3x - 2$, then $f(4) =$ … a) 10 b) 12 c) 14 d) 6 [ES] Si $f(x) = 3x - 2$, entonces $f(4) =$ … a) 10 b) 12 c) 14 d) 6 4. [EN] Which parent graph has a V shape? a) x^2 b) $\sqrt{x}$ c) $|x|$ d) $1/x$ [ES] ¿Qué gráfica madre tiene forma de V? a) x^2 b) $\sqrt{x}$ c) $|x|$ d) $1/x$ 5. [EN] If $f(x) = x + 5$ and $g(x) = 2x$, then $f(g(3)) =$ … a) 11 b) 16 c) 21 d) 13 [ES] Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = 2x$, entonces $f(g(3)) =$ … a) 11 b) 16 c) 21 d) 13 6. [EN] The inverse of $f(x) = x - 7$ is… a) $x - 7$ b) $-x + 7$ c) $x + 7$ d) $7 - x$ [ES] La inversa de $f(x) = x - 7$ es… a) $x - 7$ b) $-x + 7$ c) $x + 7$ d) $7 - x$ 7. [EN] A function fails to have an inverse if its graph fails the… a) vertical line test b) horizontal line test c) slope test d) intercept test [ES] Una función no tiene inversa si su gráfica falla la… a) prueba de la recta vertical b) prueba de la recta horizontal c) prueba de pendiente d) prueba de interceptos 8. [EN] The vertex of $g(x) = (x - 5)^2 + 2$ is… a) $(-5, 2)$ b) $(5, -2)$ c) $(5, 2)$ d) $(-5, -2)$ [ES] El vértice de $g(x) = (x - 5)^2 + 2$ es… a) $(-5, 2)$ b) $(5, -2)$ c) $(5, 2)$ d) $(-5, -2)$ 9. [EN] If $f(x) = x^2 + 1$, the range is… a) all reals b) $y \geq 0$ c) $y \geq 1$ d) $y \leq 1$ [ES] Si $f(x) = x^2 + 1$, el rango es… a) todos los reales b) $y \geq 0$ c) $y \geq 1$ d) $y \leq 1$ 10. [EN] Reflecting $f(x)$ across the x-axis gives… a) $f(-x)$ b) $-f(x)$ c) $f(x) - 1$ d) $1/f(x)$ [ES] Reflejar $f(x)$ sobre el eje x da… a) $f(-x)$ b) $-f(x)$ c) $f(x) - 1$ d) $1/f(x)$

B. Short answer · Respuesta corta 1. [EN] Find $f(g(1))$ for $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x$. [ES] Halla $f(g(1))$ para $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x$. 2. [EN] Find the inverse of $f(x) = 4x$. [ES] Halla la inversa de $f(x) = 4x$. 3. [EN] State the domain of $f(x) = 1/(x - 3)$. [ES] Indica el dominio de $f(x) = 1/(x - 3)$. 4. [EN] Describe the transformation from x^2 to $-(x)^2 + 5$. [ES] Describe la transformación de x^2 a $-(x)^2 + 5$. 5. [EN] Evaluate $f(-2)$ for $f(x) = |x - 1|$. [ES] Evalúa $f(-2)$ para $f(x) = |x - 1|$.